LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 2

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo - aula 1

- Retome-se o PLI

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\left.\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}\right\} X \qquad \mathbf{x} \in X$$

- Define-se a função Dual Lagrangeana como sendo:

PLI(**u**): $z(u) = \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\} =$

$$= \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\{x_1(1-u) + x_2(-2+u)\}$$

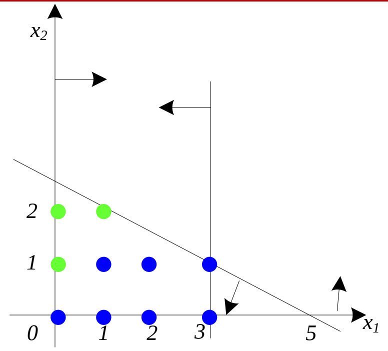
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\{x_1(1-u)+x_2(-2+u)\}$$

$$X=\begin{cases} x_1+2x_2\le 5\\ x_1 \qquad\quad \le 3\\ x_1,x_2\in\mathbb{Z}_0^+\end{cases}$$



$u\le 1 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}}=(0,2)$

$$z(u)=x_1(1-u)+x_2(-2+u)=$$
$$=0(1-u)+2(-2+u)=$$
$$=2u-4$$

$u\ge 2 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}}=(3,0)$

$$z(u)=x_1(1-u)+x_2(-2+u)=$$
$$=3(1-u)+0(-2+u)=$$
$$=3-3u$$

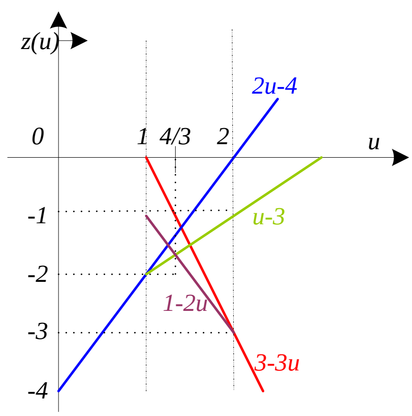
$1\le u\le 2 \quad \ldots$

Otimização Inteira

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1\\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3}\\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2\\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2\end{cases}$$

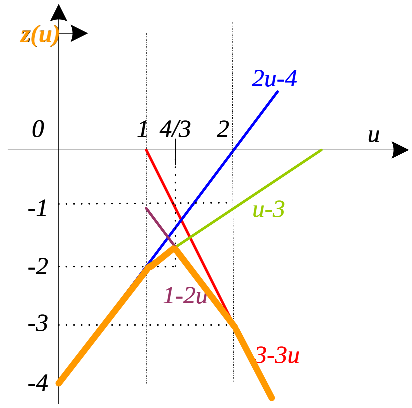


Otimização Inteira

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$



Otimização Inteira

Exemplo

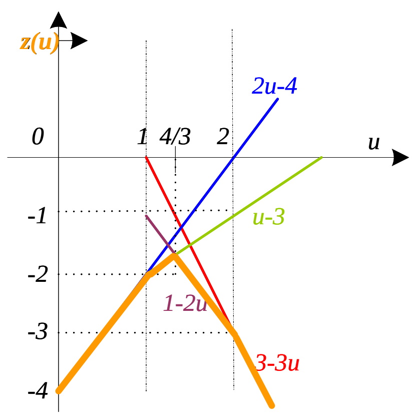
- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$

$$w_{DL}=\max_{u\ge 0}\left\{z(u)\right\} \quad \Rightarrow \quad u = 4/3$$

$$w_{DL}=-\frac{5}{3}=z_{RL}^{*}\le z^{*}=-1$$

O Dual Lagrangeano é um problema não linear!



Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente – PLI $(u = 4/3)$

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

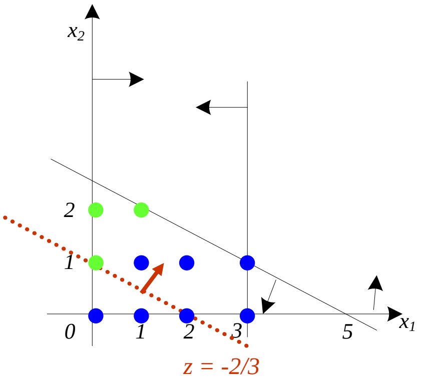
Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente – PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$



$$\tilde{\mathbf{x}} = (1;2) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3;1)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3} = z_{RL}$$

Otimização Inteira

Exemplo

- Fixando $u = 4/3$, e resolvendo PLI(u)

$$z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x}\in X}{Min}\left\{ x_1 - 2x_2 + \frac{4}{3}(-x_1 + x_2) \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boxed{(1\,;2)}$$

$$\tilde{z}(4/3) = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

Solver...

- Do Solver podemos ver que a restrição relaxada não é verificada!
- Haverá algum valor para u para o qual a SO de PLI(u) seja a SO de PLI?
- E se tivéssemos relaxado a 2ª restrição em vez da 1ª?

Otimização Inteira

Relaxações

- Dado um PLI de minimização: $z = Min\left\{ \mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \,, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n \right\}$
- Uma relaxação de PLI é o problema: $z' = Min\left\{ \mathbf{cx} :\ \mathbf{x} \in X \right\}$
- Se juntarmos as restrições "complicadas" à FO considerando multiplicadores obtemos, para $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_m)$ fixo, o problema:

PLI(u): $z(u) = Min\left\{ \mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X \right\}$

- PLI(u) é uma relaxação de PLI – Relaxação Lagrangeana
- u é o vector de multiplicadores de Lagrange – variáveis duais!

Otimização Inteira

Relaxações

- PLI(u) é uma relaxação de PLI, pois:

$$X \supseteq \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$$

$$\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \leq \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$$

Teor.: Fraco da Dualidade Lagrangeana: $z(\mathbf{u}) \leq z, \ \forall \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

- Pretendemos obter o máximo valor de $z(\mathbf{u})$, resolvendo o Dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \max\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

E se:
Restrições Relaxadas "≥" ou "=" ?

Otimização Inteira

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI$(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (complementaridade)

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. De PLI.

Prova:

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de $\text{PLI}(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (complementaridade)

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. De PLI.

Prova:

$$w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{z(\mathbf{u})\} \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) \underset{(\text{iii})}{=} \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \underset{(\text{ii})\,\tilde{\mathbf{x}}\text{ é SA de PLI}}{\geq} z^*$$

Sendo relaxação, $w_{DL} \leq z^* \Rightarrow w_{DL} = z^*$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

- Dualidade Lagrangeana – se podemos obter apenas minorantes com o problema dual (de difícil resolução!) – com a Dualidade Lagrangeana podemos reforçar tais limites!

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições (capacidade ou grau)
  - SST
  - com restrições relaxadas penalizadas e juntas à F.O.!

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Min\left\{cx : \boxed{Ax \geq b}, x \in X \subseteq Z^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Min\left\{cx + u(b - Ax) : x \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \max\limits_{u \geq 0}\left\{z(u)\right\}$

$z(u) \leq z$

$w_{DL} \leq z$

PLI $z = Min\left\{cx : \boxed{Ax \geq b, Dx \leq d, Tx = t}, x \in X \subseteq Z^n\right\}$

PLI (u) $z(u,v,y) = Min\left\{cx + u(b - Ax) + v\boxed{(d - Dx)} + y\boxed{(t - Tx)} : x \in X\right\}$

DL $w_{DL} = max\left\{z(u,v,y) : u \geq 0, \boxed{v \leq 0}; \boxed{y \ livre}\right\}$

≥ 0 $= 0$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Max\left\{cx : \boxed{Ax \leq b}, x \in X \subseteq Z^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Max\left\{cx + u\boxed{(b - Ax)} : x \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \min\limits_{u \geq 0}\left\{z(u)\right\}$

≥ 0

$z(u) \geq z$

$w_{DL} \geq z$

PLI $z = Max\left\{cx : \boxed{Ax \leq b, Dx \geq d, Tx = t}, x \in X \subseteq Z^n\right\}$

PLI (u) $z(u,v,y) = Min\left\{cx + u(b - Ax) + v\boxed{(d - Dx)} + y(t - Tx) : x \in X\right\}$

DL $w_{DL} = min\left\{z(u,v,y) : u \geq 0, \boxed{v \leq 0}; y \ livre\right\}$

$\boxed{\leq 0}$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

- Prova-se que o valor <u>ótimo</u> do Dual Lagrangeano nunca é pior que o da relaxação linear:

$$z_{RL} \leq w_{DL} \leq z^*$$

- Quando um problema goza da **propriedade de integralidade** o valor ótimo do Dual Lagrangeano coincide com o da sua relaxação Linear:

$$z_{RL} = w_{DL} \leq z^*$$

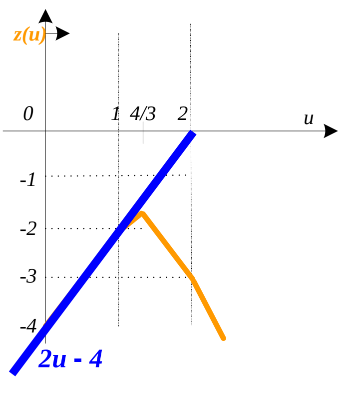
- Como obter "bons" multiplicadores de Lagrange?

$$\mathbf{u} = ?$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!
- A Função Dual, $z(\mathbf{u})$, é:
  - Linear por troços e côncava
- Se, ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO única, $\tilde{\mathbf{x}}$
  - $\Longrightarrow$ $z(\tilde{\mathbf{u}})$ é diferenciável com gradiente $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$



Ex.: $z(\tilde{\mathbf{u}}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \{x_1(1-\tilde{u}) + x_2(\tilde{u}-2)\}$ $\oplus$ $\ominus$

$\tilde{u} < 1$:

gradiente: $-x_1 + x_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ em $\tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$ declive de $z(\mathbf{u})$!

. . .

Otimização Inteira

Exercícios

1. Escrever a Relaxação Lagrangeana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (*):

a) $Max\ Z = 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 & (*) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{\mathcal{B}} \end{cases}$$

b) $Min\ Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 & (*) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 & (*) \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

2. Resolver os problemas relaxados do exercício 1 considerando, em cada alínea, os multiplicadores seguintes:

a) i) $u = 2$; ii) $u = 0{,}5$; iii) $u = 1$; iv) $u = 6$;

b) i) $\mathbf{u} = (1{,}1)$; ii) $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$; iii) $\mathbf{u} = (0{,}1)$; iv) $\mathbf{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$;.

Indique, em cada alínea, o valor do melhor *bound* encontrado bem como a respetiva solução.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Trabalho 1

Considere o seguinte prolema de PLIM

$$Min\ 8x_{11} + 7x_{21} + 4x_{22} + x_{31} + 3x_{32} + 36y_1 + 12y_2 + 36y_3$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 6 & (*) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6 & (*) \\ x_{11} + x_{12} \leq 12y_1 \\ x_{21} + x_{22} \leq 12y_2 \\ x_{31} + x_{32} \leq 12y_3 \\ y_i \in \{0,1\};\ 0 \leq x_{ij} \leq 6 \quad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2 \end{cases}$$

a) Considerando $\mathbf{u} = (4{,}6)$ defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com (*).

b) Identificar este problema como uma instância de um problema estudado no mestrado, definindo as variáveis de forma compatível.